

大学数学のアトリエ | 線形代数 第 2 章 連立一次方程式

No.3 同次方程式と非同次方程式

この回のゴール

- 同次方程式 $Ax = 0$ が自明でない解をもつ条件を, ランクで述べられる.
- 同次方程式の解を「基本解」の組合せで表せる.
- 非同次方程式の一般解が「特殊解 + 同次方程式の一般解」であることを示し, 使える.
- 正方行列について「正則 $\iff Ax = 0$ の解が 0 だけ」を説明できる.

■ 1. 同次方程式

定義 1 同次方程式・非同次方程式

右辺がすべて 0 の連立一次方程式 $Ax = 0$ を同次方程式 (斉次方程式) という. $b \neq 0$ のとき, $Ax = b$ を非同次方程式という.

同次方程式には必ず $x = 0$ (すべての未知数が 0) という解がある. これを自明な解という. 問題は, それ以外の解 (自明でない解) があるかどうかである.

定理 1

A を $m \times n$ 行列とする.

$$Ax = 0 \text{ が自明でない解をもつ} \iff \text{rank } A < n.$$

【証明】 $(A | 0)$ の最後の列はずっと 0 のままなので, $\text{rank}(A | 0) = \text{rank } A$ で, いつも解をもつ. No.2 定理 2 より, 解がただ 1 つ (自明な解だけ) であるのは $\text{rank } A = n$ のときに限る. $\square$

定理 2 式が未知数より少ない同次方程式

$m < n$ なら, $Ax = 0$ は自明でない解をもつ.

【証明】 $\text{rank } A \leq m < n$ と定理 1 から従う. $\square$

■ 2. 同次方程式の解の性質

定理 3 重ね合わせ

u, v が $Ax = 0$ の解で, c が実数ならば, $u + v$ と cu も $Ax = 0$ の解である.

【証明】 分配法則より $A(u + v) = Au + Av = 0 + 0 = 0$, $A(cu) = c(Au) = c0 = 0$. $\square$

つまり, 同次方程式の解は「足しても, 定数倍しても, また解」である. この性質をもつ集まりは, 第 4 章で部分空間と呼ばれる.

例題 1

$$\text{同次方程式} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{を解け.}$$

【解答】 右辺はずっと 0 なので、係数行列だけを変形すればよい。第1章 No.4 例題1と同じ行列で、その簡約階段行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって $x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$, $x_3 - 2x_4 = 0$. 主成分のない x_2, x_4 を $x_2 = s$, $x_4 = t$ とおくと $x_1 = -2s - t$, $x_3 = 2t$ なので,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2s - t \\ s \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = s \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}_2} \quad (s, t \text{ は任意の実数}).$$

例題1の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ のように、パラメータを1つだけ1, 他を0にして得られる解を**基本解**という。同次方程式のどんな解も、基本解に数を掛けて足し合わせた形

$$\boldsymbol{x} = t_1 \boldsymbol{v}_1 + t_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + t_k \boldsymbol{v}_k \quad (k = n - \text{rank } A)$$

で**ただ1通りに**表される。(パラメータ t_i は、主成分のない列の未知数の値そのものなので、解から一意に決まる.)

注意

- 基本解の個数は $n - \text{rank } A$ (No.2 の「自由度」).
- 基本解の選び方は1通りではない。別の未知数の組をパラメータに取れる場合には、別の基本解の組が得られる。ただし、どの未知数の組でも自由に選べるわけではない。たとえば例題1では $x_3 = 2x_4$ なので、 x_3 と x_4 を同時にパラメータにすることはできない。ただし、個数 $n - \text{rank } A$ はいつも同じである (これは第4章の「次元」で理解できる)。

■ 3. 非同次方程式の一般解

非同次方程式 $Ax = b$ の解を, 同次方程式 $Ax = 0$ を手がかりにして調べる.

定理 4 一般解の構造

x_0 を $Ax = b$ の解の 1 つ (特殊解) とする. このとき

$$x \text{ が } Ax = b \text{ の解} \iff x - x_0 \text{ が } Ax = 0 \text{ の解.}$$

したがって, $Ax = b$ の解全体は

$$x = \underbrace{x_0}_{\text{特殊解}} + \underbrace{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k}_{\text{同次方程式の一般解}}$$

と表される ($v_1, \dots, v_k$ は $Ax = 0$ の基本解).

【証明】 $A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = Ax - b$ である. よって $Ax = b \iff A(x - x_0) = 0$. □

例 1

例題 1 の係数行列で, 右辺を $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に変えた方程式 $Ax = b$ を考える. b は A の第 1 列と同じ

なので, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が特殊解である (Ax_0 は A の第 1 列). よって一般解は

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \text{ は任意}).$$

拡大係数行列を掃き出しても, もちろん同じ結果になる.

注意

特殊解の選び方は自由である. たとえば上の例で $x'_0 = x_0 + v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を特殊解に選んでも, パラメータの付け方がずれるだけで, 表している解の集まりは同じである.

コラム：図形で見ると「平行移動」

同次方程式の解の集まりは、原点 $\mathbf{0}$ を含む集合である ($\mathbb{R}^3$ なら、原点だけ・原点を通る直線・原点を通る平面・空間全体のどれか)。非同次方程式の解の集まりは、解が存在する場合、それを特殊解 $\mathbf{x}_0$ だけ平行移動したものになる。 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ なので原点は含まない (1 点だけの場合も、原点を通らない直線や平面の場合もある)。解が存在しない場合もあることに注意。この「特殊解 + 同次の一般解」という形は、微分方程式 (線形微分方程式) でもまったく同じように現れる。

■ 4. 正方行列の場合

係数行列が正方行列のとき、ここまでの結果は次のようにまとめられる。

定理 5 正則性の言い換え

n 次正方行列 A について、次は同値である。

- (a) A は正則である。
- (b) $\text{rank } A = n$.
- (c) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は自明な解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ だけである。
- (d) どんな $\mathbf{b}$ に対しても、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ はただ 1 つの解をもつ。

【証明】 (a) $\iff$ (b) は第 1 章 No.5 定理 2. (b) $\iff$ (c) は定理 1.

(b) $\Rightarrow$ (d) : $(A | \mathbf{b})$ は $n \times (n+1)$ 行列なので $\text{rank}(A | \mathbf{b}) \leq n = \text{rank } A$. $\text{rank}(A | \mathbf{b}) \geq \text{rank } A$ と合わせて等号が成り立ち、No.2 定理 1・定理 2 より解はただ 1 つ。

(d) $\Rightarrow$ (c) : $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合を考えればよい。 □

■ 練習問題

1. 次の同次方程式を解き、基本解を答えよ。

$$(1) \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

2. 同次方程式 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 3y + kz = 0 \end{cases}$ が自明でない解をもつような k の値を求め、そのときの解を求めよ。

3. No.1 練習問題 2 の解

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で、特殊解と同次方程式の基本解はそれぞれどれか。また、基本解が同次方程式を満たすことを確かめよ。

4. $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ がどちらも $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解であるとする。

(1) $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ は $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解であることを示せ。

- (2) $\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$ は $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解であることを示せ.
- (3) $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ なら, $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ は $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解でないことを示せ.
5. (考えてみよう) 第1章 No.3 では, 正則の定義に $AX = E$ と $XA = E$ の両方を要求した. 実は正方行列なら $AX = E$ だけで十分であることを, 次の手順で示せ. A, X を n 次正方行列とし, $AX = E$ とする.
- (1) $X\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ならば $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ であることを示せ. (ヒント: $\mathbf{x} = E\mathbf{x} = AX\mathbf{x}$)
- (2) 定理5を使って, X が正則であることを示せ.
- (3) $A = X^{-1}$ を示し, $XA = E$ を導け.

■ 練習問題の解答

以下, 縦に並ぶ列ベクトルを ${}^t(a, b, c)$ のように転置を使って横書きすることがある.

1. (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1} \times 2, \textcircled{3}-\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\textcircled{2} \times (-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1}-\textcircled{2} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$x + z = 0, y - z = 0. z = t$ とおくと $\mathbf{x} = t{}^t(-1, 1, 1)$. 基本解は ${}^t(-1, 1, 1)$.

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \times (-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\textcircled{1}-\textcircled{2} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$x_1 = x_2 + x_4, x_3 = -x_4. x_2 = s, x_4 = t$ とおくと $\mathbf{x} = s{}^t(1, 1, 0, 0) + t{}^t(1, 0, -1, 1)$. 基本解は ${}^t(1, 1, 0, 0), {}^t(1, 0, -1, 1)$. (式2本・未知数4個なので, 定理2どおり自明でない解がある.)

2. 係数行列は第1章 No.5 練習問題3の行列で, そのランクは $k = 5$ のとき2, それ以外は3. よって自明でない解をもつのは $k = 5$ のとき. このとき簡約すると $x - z = 0, y + 2z = 0$ ($\textcircled{2} - \textcircled{1}, \textcircled{3} - \textcircled{1}, \textcircled{3} - \textcircled{2} \times 2, \textcircled{1} - \textcircled{2}$). $z = t$ とおいて $\mathbf{x} = t{}^t(1, -2, 1)$.
3. 特殊解は ${}^t(3, 0, 1, 0)$ ($s = t = 0$ のとき), 基本解は ${}^t(-2, 1, 0, 0), {}^t(-2, 0, -1, 1)$. 例えば2つめを左辺に代入すると $-2 + 0 + 1 + 1 = 0, -4 + 0 + 0 + 4 = 0, -2 + 0 - 1 + 3 = 0$ で, 確かに同次方程式を満たす.
4. (1) $A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$. (2) $A(\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)) = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{b}) = \mathbf{b}$. (3) $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = 2\mathbf{b}$ で, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ なら $2\mathbf{b} \neq \mathbf{b}$.
5. (1) $X\mathbf{x} = \mathbf{0}$ とすると $\mathbf{x} = E\mathbf{x} = (AX)\mathbf{x} = A(X\mathbf{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. (2) (1) より $X\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は自明な解だけなので, 定理5 (c) $\Rightarrow$ (a) より X は正則. (3) $AX = E$ の両辺に右から X^{-1} を掛けて $A = X^{-1}$. よって $XA = XX^{-1} = E$.

※ これで「正方行列 A について, $AX = E$ となる X があれば A は正則で $X = A^{-1}$ 」が示された.